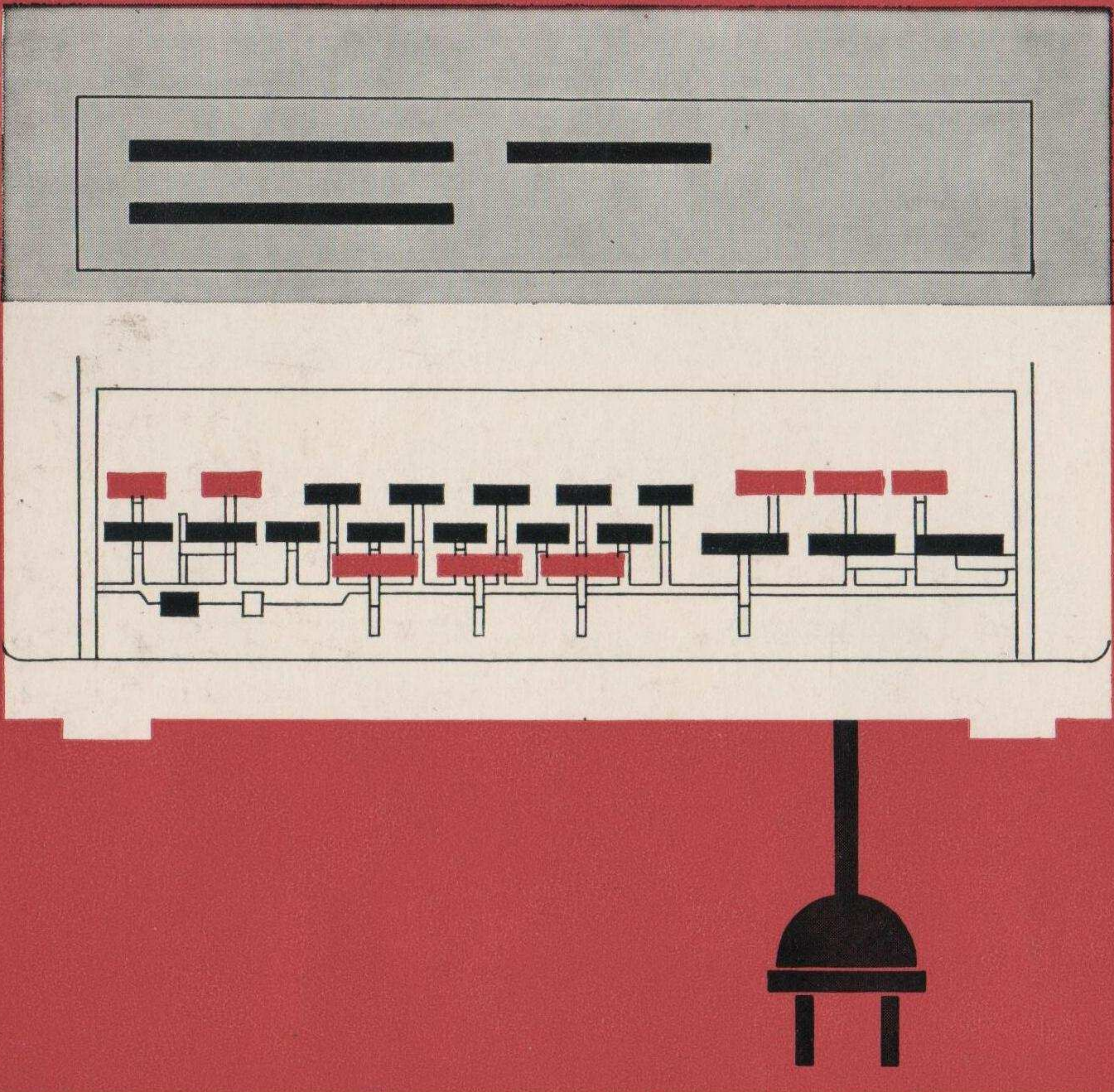


Bedienungsanleitung / **FACIT CA1-13**

FACIT CA1-13

Bedienungsanleitung

zu den späteren Modellen, bei denen das **Einstellwerk I** mit der Taste I und das **Resultatwerk III** mit III gelöscht wird. Die Bedienungsanleitung ist weitgehend im Originallayout gesetzt. Der Teil „Praktische Beispiele“ wurde weggelassen, dafür aber ein Abschnitt „Quadratwurzeln: wenn mindestens 8 genaue Ziffern benötigt werden“ hinzugefügt. Außerdem ist eine schnellere und genauere Alternative zur Berechnung reziproker Werte angegeben. Ein Anhang schließlich behandelt das Maschinenrechnen auf der Facit CA1-13, und zwar die allgemeine Wurzelbehandlung sowie die Berechnung trigonometrischer Funktionen.

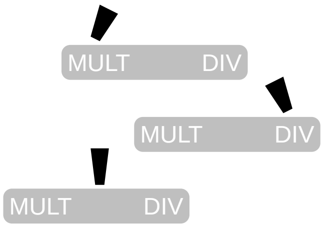
Aus der ursprünglichen Einleitung: „Die Bedienung dieses Vollautomaten ist so einfach, daß Sie schon nach kurzer Zeit schnell und sicher mit ihm rechnen werden. Damit Sie die CA1-13 leichter beherrschen lernen, finden Sie in dieser Gebrauchsanleitung eine Anzahl von Rechenbeispielen. Die Betätigung der einzelnen Tasten wird beschrieben mittels eines Systems von Funktionssymbolen. Hierzu ist auf Seite 3 die Maschine abgebildet, und auf den Seiten 2 – 3 wird die Funktionsweise der verscheidenen Bedienteile erklärt. Bitte lesen Sie diese Erläuterungen aufmerksam durch und merken Sie sich die Symbole, die auch auf den folgenden Seiten angewandt werden. Stellen Sie die Maschine beim Lesen der Gebrauchsanleitung am besten vor sich, dann können Sie gleich alles selbst probieren.“

Harald Schmid

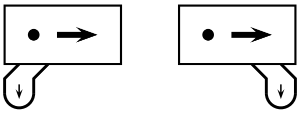
Inhalt

1 

Löschtasten

2 

Steuerhebel (mit Schlittenstellhebel). Steht der Steuerhebel **links**, so erfolgt die Schrittschaltung von rechts nach links bei voll- und halbautomatischer Multiplikation. Steht der Steuerhebel **rechts**, so erfolgt die Schrittschaltung von links nach rechts bei vollautomatischer Division. In der **Mittelstellung** wird der Schlittenstellhebel eingeschaltet. (Dieser wirkt nicht auf den Rechenvorgang ein, wenn der Steuerhebel rechts oder links steht.)

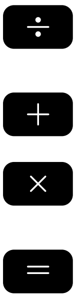
3 

Der **Schlittenstellhebel** spricht nur an, wenn der Steuerhebel in der Mitte steht. Wenn der Schlittenstellhebel nach links umgelegt ist, erfolgt keine Schrittschaltung. Wenn der Schlittenstellhebel nach rechts umgelegt ist, arbeitet die Schrittschaltung von links nach rechts.

Funktionstasten

4 

Eine im Einstellwerk I eingetastete Zahl wird im Resultatwerk III addiert und dann gleich automatisch gelöscht.

5 

Taste für Subtraktion, halbautomatische Multiplikation sowie Einleitung und Unterbrechung der Division.

Taste für halbautomatische Multiplikation.

Wird bei der Multiplikation betätigt, nachdem man die erste Zahl eingetastet hat.

Leitet die Multiplikation ein, nachdem man die zweite Zahl eingestellt hat.

6 

Schlittenschrittaste nach links. Bewegt die Zahl im Einstellwerk I schrittweise nach links.

7 

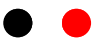
Schlittenschrittaste nach rechts. Bewegt die Zahl im Einstellwerk I schrittweise nach rechts.

8 

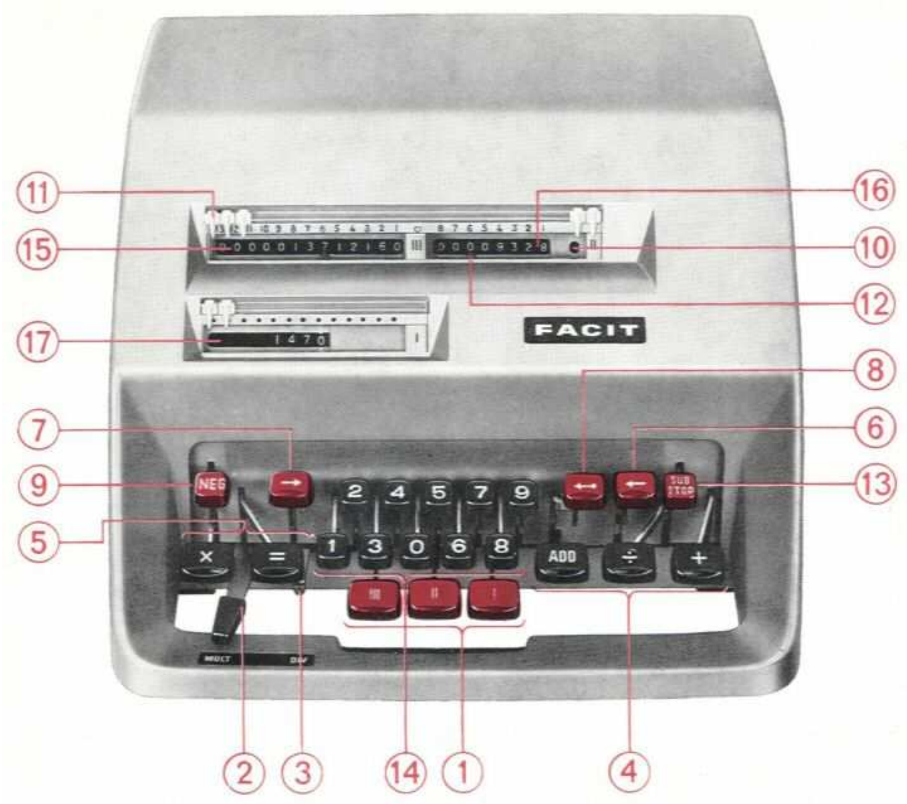
Der **Totaltabulator** tabuliert die eintestellte Zahl ganz nach links – direkt in die Divisionsstellung. Gleichzeitig werden an Zahlen mit weniger als 6 Stellen Nullen angehängt. **NB:** Wenn man vor dem Tabulator die Linksschrittaste gedrückt hat, werden keine Nullen angehängt.

9 

Drehrichtungstaste zum Zählen von positiven oder negativen Umdrehungen im Werk II unabhängig von der Stellung des Steuerhebels.

10 

Das **Drehrichtungssignal** gibt an, ob das Umdrehungszählwerk II positiv (schwarz) oder negativ (rot) arbeitet.



11	▽	**Kommazeiger** sind über den einzelnen Werken angebracht und verschiebbar.
12		Die **Stellenzeiger** der Werke III und II kennzeichnen die Stelle, in der das Werk rechnet.
13	SUB STOP	**Sub-Stop-Taste.** Beim Subtrahieren wird diese Taste zugleich mit der Taste ÷ betätigt, um das Einstellwerk I zu löschen. Beim Dividieren, um die Division zu unterbrechen.
14	2 4 5 7 9 1 3 0 6 8	**Zifferntasten**
15	0 0 0 0 0 1 3 7 1 2 1 6 0 III	**Resultatwerk III** (Kapazität: 13 Stellen). Hier erscheint das Ergebnis von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen. Ein etwaiger Rest steht nach der Division in diesem Werk.
16	0 0 0 0 9 3 2 8 II	**Umdrehungszählwerk II** (Kapazität: 8 Stellen). Beim Dividieren erscheint das Resultat (der Quotient) in diesem Werk. Beim Addieren zeigt es an, wieviele Posten addiert worden sind. Beim Multiplizieren nimmt es den zuerst eingetasteten Faktor auf.
17	1 4 7 0 I	**Einstellwerk I** (Kapazität: 9 Stellen). Jede Ziffer, die mit den Zifferntasten eingestellt wird, erscheint sofort in diesem Werk.

Addition

Beispiel: 487 + 394 + 85

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	4 8 7 ADD 3 9 4 ADD 8 5 ADD
Werk III liefert das Resultat	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 6 6
Werk II zeigt an, wieviele Posten addiert worden sind	0 0 0 0 0 0 0 3

Subtraktion

Beispiel: 1283 – 768

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	1 2 8 3 ADD 7 6 8 { SUB STOP * / ÷ }
Werk III liefert das Resultat	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 1 5

*) Wenn man diese zwei Tasten beim Subtrahieren gleichzeitig niederdrückt, wird das Werk I nach einer Umdrehung auf Null gestellt.

Addition und Subtraktion von Zahlen mit 10 bis 13 Stellen

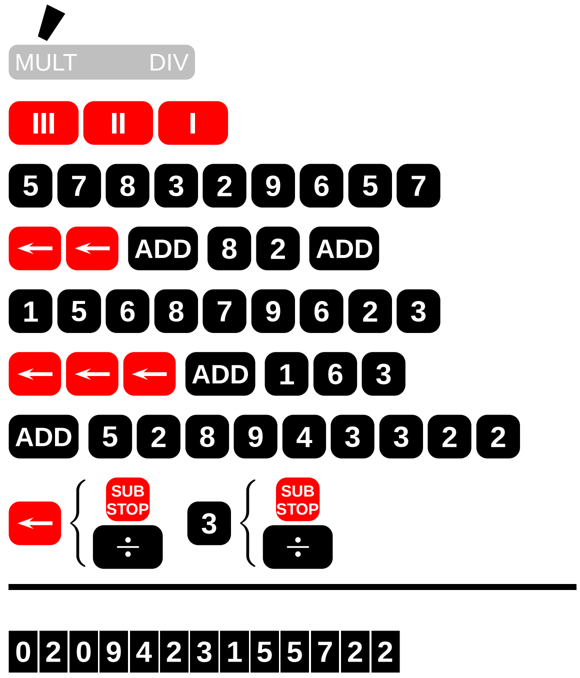
Beispiel: 57832965782
+156879623163
–5289433223

Steuerhebel ....

Maschine nullstellen ....

Rechenvorgang ....

Werk III liefert das Resultat ....



REGEL: Im Einstellwerk I die Ziffern der Zahl einstellen, die das Werk aufnehmen kann (höchstens 9 Stellen). Dann für jede weitere Ziffer einmal die Linksschrittaste niederdrücken und addieren oder subtrahieren. Mit den anderen Posten in gleicher Weise verfahren.

Subtraktion unter Null

Beispiel: 57 – 68

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Rechenvorgang .... 5 7 ADD 6 8 { SUB STOP / ÷ }

Werk III zeigt das Resultat 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 8 9

(Die Neunen vor der Zahl zeigen, daß das Resultat negativ ist.) Bei einem negativen Resultat muß noch die dekadische Ergänzung gebildet werden.

Rechenvorgang .... 9 9 8 9 ÷ ÷

Die zwei Neunen vor der eingetasteten Zahl ergeben zwei Nullen vor dem Endresultat.

Werk III liefert das Resultat 9 9 9 9 9 9 9 9 8 0 0 1 1

<u>Das Resultat ist also -11</u>

Vollautomatische Multiplikation

Beispiel: 189 × 53678

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	1 8 9 × 5 3 6 7 8 =
Werk III zeigt das Resultat	0 0 0 0 0 1 0 1 4 5 1 4 2
Werk II enthält die zuerst eingestellte Zahl	0 0 0 0 0 1 8 9
Werk I zeigt die zuletzt eingetastete Zahl	5 3 6 7 8

Korrigieren bei der Multiplikation

REGEL:

Den zuerst eingestellten Faktor korrigieren mit	I
Den zweiten Faktor korrigieren mit	×

Quadrieren

Beispiel: 179^2

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	1 7 9 =
Werk III liefert das Resultat	0 0 0 0 0 0 0 0 3 2 0 4 1

Multiplikation mit konstantem Faktor

Beispiel: 879 × 46
879 × 132
879 × 9

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang 1	8 7 9 × 4 6 =
Resultat 1	0 0 0 0 0 0 0 0 4 0 4 3 4
Maschine nullstellen	× III II
Rechenvorgang 2	1 3 2 =
Resultat 2	0 0 0 0 0 0 0 1 1 6 0 2 8
Maschine nullstellen	× III II
Rechenvorgang 3	9 =
Resultat 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 9 1 1

REGEL: Keine Betätigung der Tasten .... ADD SUB STOP I

weil diese das Rechenwerk löschen, das den konstanten Faktor enthält.

Multiplikation mit Addition der Produkte

Beispiel: (18 × 365) + (29 × 1432)

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	1 8 × 3 6 5 = II I 2 9 × 1 4 3 2 =
Werk III zeigt das Resultat	0 0 0 0 0 0 0 0 4 8 0 9 8

Negative Multiplikation

Beispiel: (82 × 65) − (21 × 14)

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	8 2 × 6 5 = II I NEG 2 1 × 1 4 =
Werk III zeigt das Resultat	0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 3 6
Das Drehrichtungssignal steht auf rot (subtraktive Umdrehung)	
Drehrichtungstaste drücken	NEG
Das Drehrichtungssignal steht auf schwarz (additive Umdrehung)	

REGEL: Das Produkt der ersten Multiplikation im Werk III stehen lassen, dann die Drehrichtungstaste niederdrücken. Die weiteren Produkte werden dadurch negativ eingerechnet und im Resultatwerk abgezogen.

Halbautomatische Multiplikation

Beispiel: 75816 × 1793

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Faktor eintasten 7 5 8 1 6

Die Plus-Taste niedergedrückt halten, bis das Rechenwerk drei Umdrehungen ausgeführt hat. Nun steht die Zahl 3 im Werk II. Das Einstellwerk wird automatisch um einen Schritt nach links bewegt. + 3

Die Minus-Taste niedergedrückt halten, bis das Rechenwerk eine Umdrehung ausgeführt hat. Vor der Zahl 93 erscheint eine Reihe Neunen. ÷ 1

Die Minus-Taste niedergedrückt halten, bis das Rechenwerk zwei Umdrehungen ausgeführt hat (9 - 2 = 7). ÷ 2

Die Plus-Taste niedergedrückt halten, bis das Rechenwerk zwei Umdrehungen ausgeführt hat. Bei der ersten Umdrehung werden die Neunen gelöscht, bei der nächsten Umdrehung erscheint eine Eins. + 2

Werk III liefert das Resultat 0 0 0 0 1 3 5 9 3 8 0 8 8

Werk II enthält den stellenweise eingerechneten Faktor 0 0 0 0 1 7 9 3

Werk I zeigt den zuerst eingetasteten Faktor .. 7 5 8 1 6

Korrigieren:

Sollte die Taste beim Aufbauen der Zahl im Werk II um eine oder mehrere Umdrehungen zu früh oder zu spät losgelassen werden, so ist das Werk mit der Rechtsschrittaste an die Stelle zurückzuführen, wo die falsche Zahl steht. Dann wird die Zahl mit der Minus- oder Plus-Taste korrigiert.

Division

Beispiel: 70224 : 368

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Rechenvorgang	7 0 2 2 4 ← ADD
	3 6 8 ← ÷
Werk II zeigt das Resultat	19082608
Werk III zeigt den Rest	0000000256000

Unterbrechen des Divisionsablaufs:

Nachdem die Maschine so viele Stellen im Werk II errechnet hat, wie Sie benötigen, können Sie den Rechenablauf unterbrechen, indem Sie die Minus-Taste niedergedrückt halten, bis die Maschine stehenbleibt. ÷

Durch einen leichten Druck auf die Sub-Stop-Taste können Sie die Maschine augenblicklich zum Stehen bringen. Die letzte Zahl im Werk II ist aber dann wegzulassen, da die Maschine evtl. nicht zu Ende gerechnet hat. SUB STOP

Setzen des Dezimalkommas beim Addieren und Subtrahieren

Beispiel: 27,9 — 14,325 + 5,18

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Rechenvorgang .... 2 7 9 0 0 ADD

1 4 3 2 5 { SUB STOP / ÷

5 1 8 0 ADD

Werk III zeigt das Resultat ....

3

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	7	5	5

REGEL: Das Kommazeichen muß bei allen eingetasteten Zahlen auf der gleichen Stelle stehen. Maßgebend ist die Zahl mit den meisten Dezimalstellen – bei den restlichen Zahlen sind entsprechend viel Nullen anzuhängen.

Setzen des Dezimalkommas beim Multiplizieren

Beispiel: 18,9 × 536,78

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Rechenvorgang .... 1 8 9 × 5 3 6 7 8 =

Werk III zeigt das Resultat ....

3

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	1	0	1	4	5	1	4	2

REGEL, siehe nächste Seite

REGEL: Kommastellen im Werk II + Kommastellen im Werk I = Kommastellen im Werk III. Im vorstehenden Beispiel ist der Kommazeiger also auf 3 zu stellen.

Setzen des Dezimalkommas beim Dividieren

Beispiel: 2,34 : 1,3

Steuerhebel ....

Maschine nullstellen ....

Rechenvorgang ....

Komma im Werk III setzen ....

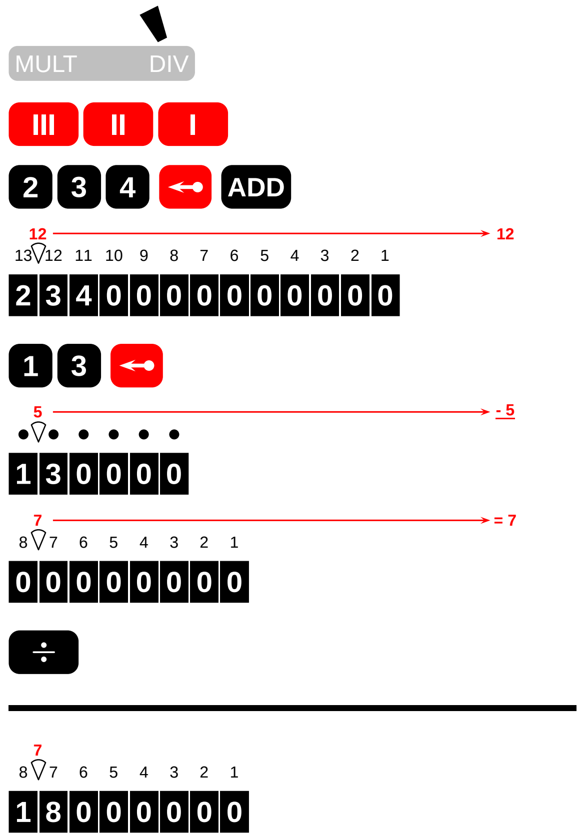
Rechenvorgang ....

Komma im Werk I setzen ....

Komma im Werk II setzen ....

Rechenvorgang ....

Werk II liefert das Resultat ....



REGEL: Kommastellen im Werk III minus Kommastellen im Werk I = Kommastellen im Werk II.

Setzen des Dezimalkommas bei Divisionen

wenn das Werk II nicht für das Setzen des Dezimalkommas ausreicht

Beispiel: 98,67 : 1344,78

Steuerhebel ....

Maschine nullstellen ....

Rechenvorgang ....

Komma im Werk III setzen ....

Rechenvorgang ....

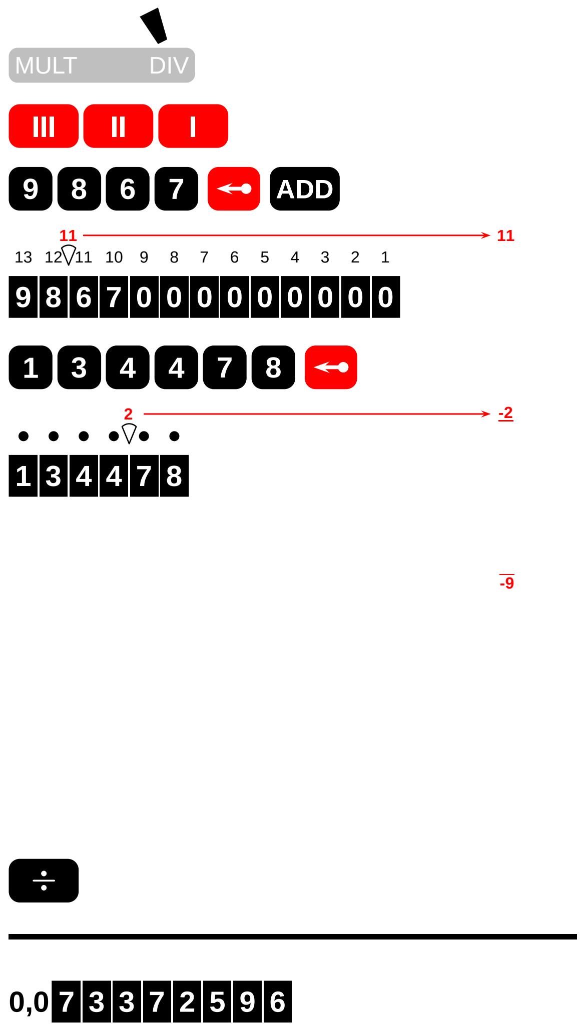
Komma im Werk I setzen ....

Da das Werk II nur 8 Stellen faßt, fehlt eine Dezimalstelle im Quotienten. Die fehlenden Stellen sind immer Nullen und müssen vor das Ergebnis im Werk II geschrieben werden. Um sie nicht zu vergessen, tue man dies noch bevor man die Maschine rechnen läßt.

Rechenvorgang ....

Werk II zeigt das Resultat ....

Mit richtig gesetztem Komma ist das Ergebnis also <u>0,073372596</u>.



Setzen des Dezimalkommas bei Divisionen

deren Divisor ein Dezimalbruch unter 1 ist

Beispiel: 18,09 : 0,003

Steerhebel ....

Maschine nullstellen ....

Rechenvorgang ....

Komma im Werk III setzen ....

Rechenvorgang (die Nullen nicht eintasten) ...

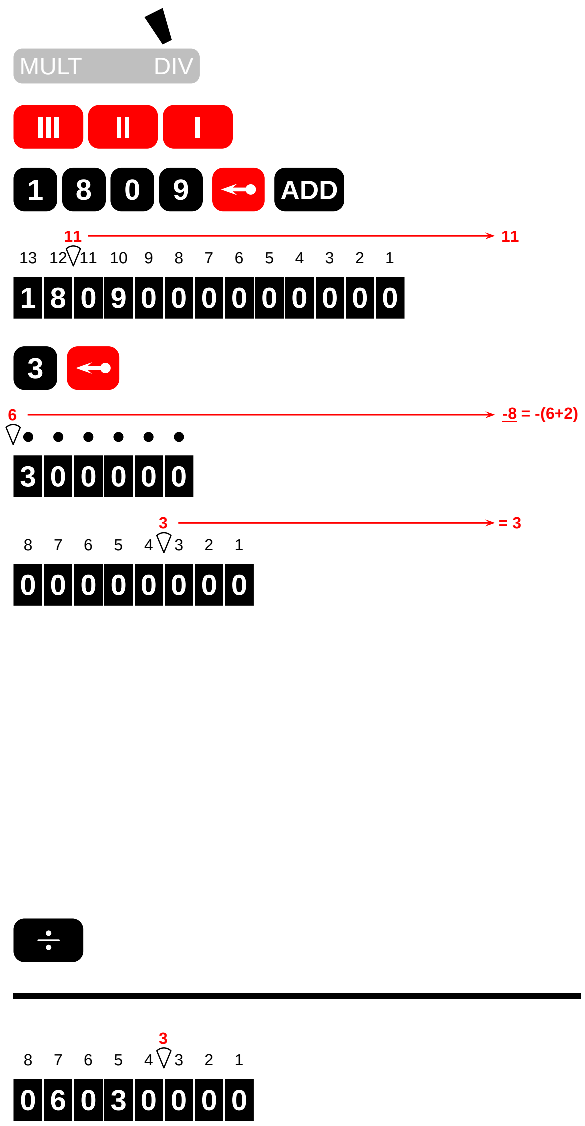
Komma im Werk I setzen ....

Komma im Werk II setzen ....

11 Kommastellen im Werk III minus 8 Kommastellen im Werk I (d.h. 6 sichtbare Kommastellen + 2 nicht eingetastete Nullen) = 3 Kommastellen im Werk II.

Rechenvorgang ....

Werk II liefert das Resultat ....



Dreisatzrechnung

Beispiel: $\dfrac{35875 \times 435}{147}$

Steuerhebel ....

Maschine nullstellen ....

Rechenvorgang (kleinsten Faktor zuerst nehmen), immer **eine** Null voranstellen ....

Nullen bis zum weißen Strich im Werk I anhängen ....

Komma im Werk II setzen ....

Komma im Werk I setzen ....

Komma im Werk III setzen ....

Steuerhebel ....

Rechenvorgang ....

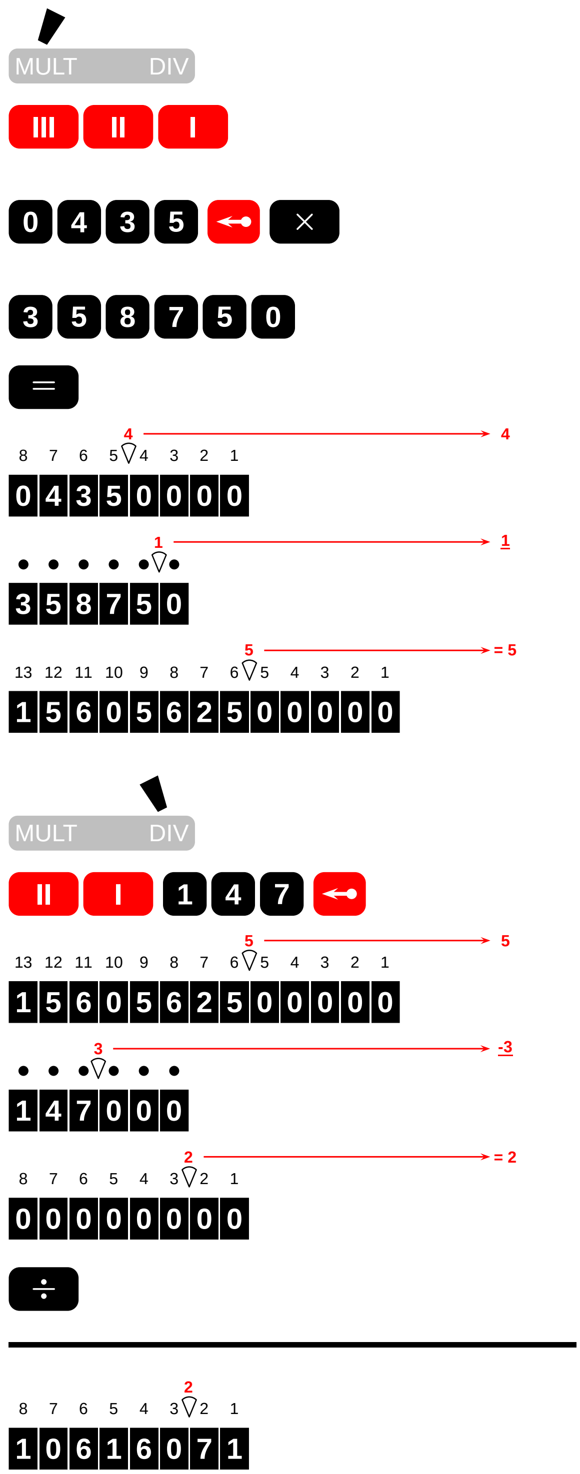
Komma im Werk III setzen ....

Komma im Werk I setzen ....

Komma im Werk II setzen ....

Rechenvorgang ....

Werk II zeigt das Resultat ....



Reziproke Werte

Der reziproke Wert (1 : Zahl) läßt sich am einfachsten durch eine gewöhnliche Division errechnen. Man erhält dabei ein siebenstelliges Resultat, was in den meisten Fällen reicht.

Beispiel: $\frac{1}{52{,}27}$

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Rechenvorgang .... 1 ← ADD

5 2 2 7 ← ÷

8 7 6 5 4 3 2 1

Werk II zeigt das Resultat 0 1 9 1 3 1 4 3

DEZIMALKOMMAREGEL: Vor die 7. Stelle im Werk II sind ebensoviele Nullen zu stellen, wie die ursprüngliche Zahl ganze Stellen hat, in diesem Falle also zwei. Die erste Null steht immer als Einer vor dem Komma. Der reziproke Wert von 52,27 ist also 0,01913143.

Alternative (mit Plusdivision)

Steuerhebel .... MULT DIV

Maschine nullstellen .... III II I

Umschalten auf additive Umdrehung .... NEG

Rechenvorgang .... 5 2 2 7 ← +

8 7 6 5 4 3 2 1

Werk II liefert das Resultat 1 9 1 3 1 4 3 3

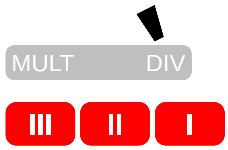
Diese Rechnung geht schneller, und man erhält ein achtstelliges Resultat. Die zwei Nullen aus der Kommaregel sind hier vor das Ergebnis im Werk II zu stellen.

Quadratwurzeln

wenn höchstens 5 genaue Ziffern verlangt werden

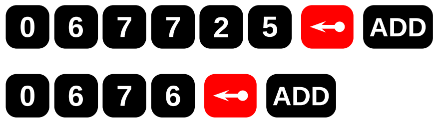
Beispiel: $\sqrt{677{,}25}$

Steuerhebel ....

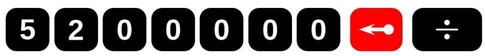


Maschine nullstellen ....

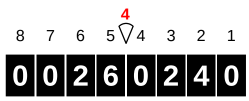
Den Radikanden (677,25) zu dem ihm am nächsten liegenden Wert (0676) in der Kolonne $\sqrt{\text{Zahl}}$ der Tabellen auf Seite 21 addieren. Wenn die erste Ziffer des Radikanden eine 5 oder eine Ziffer über 5 ist, immer eine Null voranstellen, also im vorliegenden Falle 0677,25 ....



Dann durch die Zahl rechts von 0676 in der Tabelle dividieren. Der Divisor ist der „ungeraden“ Kolonne der Tabelle zu entnehmen, wenn der Radikand eine ungerade Anzahl Stellen vor dem Komma hat, und sinngemäß aus der „geraden“ Kolonne, wenn die Stellenanzahl gerade ist. Im vorliegenden Falle gilt also die „ungerade“ Kolonne, und der Wert ist 5200000 ....



Das Werk II *) liefert die Quadratwurzel ....



Dieses Verfahren ergibt mindestens 5 genaue Ziffern. Das garantiert verläßliche Resultat ist also 26,024.

*) **Kommaregel:**

1 - 2	Stellen vor dem Komma im Radikanden = 1 Stelle vor dem Komma in der Quadratwurzel
3 - 4	Stellen vor dem Komma im Radikanden = 2 Stelle vor dem Komma in der Quadratwurzel
5 - 6	Stellen vor dem Komma im Radikanden = 3 Stelle vor dem Komma in der Quadratwurzel

usw.

Radikand unter 1	Wert aus der Kolonne	Komma folgendermaßen setzen:
0,...	gerade	0,...
0,0...	ungerade	0,...
0,00...	gerade	0,0...
0,000...	ungerade	0,0...
0,0000...	gerade	0,00...

Quadratwurzeln

wenn mindestens 8 genaue Ziffern verlangt werden

Beispiel: $\sqrt{677{,}25}$

Steuerhebel	MULT DIV
Maschine nullstellen	III II I
Den Radikanden (677,25) ganz nach links tabulieren und mit 050000 (05 + 4 mal Null) multiplizieren. Wenn der Radikand eine ungerade Anzahl von Stellen vor dem Komma oder eine ungerade Anzahl von Nullen nach dem Komma hat, immer eine Null voranstellen, also im vorliegenden Falle 0677,25	0 6 7 7 2 5 ← × 0 5 0 0 0 0 =
Steuerhebel	MULT DIV
Werk II und Werk I nullstellen	II I
Durch den fünfstelligen Näherungswert dividieren. Dieser Wert (26,024) wird nach dem Verfahren auf der vorhergehenden Seite ermittelt. Zusätzlich immer eine Null voranstellen.	0 2 6 0 2 4 ← ÷
Steuerhebel	MULT DIV
Resultatwerk III nullstellen	III
Den Näherungswert, der noch im Multiplikatorwerk gespeichert ist, mit der Zahl 400000 (4 + 5 mal Null) multiplizieren	× 4 0 0 0 0 0 =
Steuerhebel	MULT DIV
Einstellwerk I löschen	I
Das Produkt im Resultatwerk zum Inhalt des Umdrehungszählwerks addieren mit	1 ← ÷
Das Werk II *) zeigt die Quadratwurzel	8 7 6 5 4 3 2 1 2 6 0 2 4 0 2 7

***) Es ist die Kommaregel auf der vorhergehenden Seite anzuwenden.**

Quadratwurzel-Tabelle

Divisor für Quadratwurzeln

$\sqrt{\text{Zahl}}$	Ungerade	Gerade	$\sqrt{\text{Zahl}}$	Ungerade	Gerade
100	2000000	6324556	190	2756810	8717798
102	2019901	6387488	192	2771282	8763561
104	2039608	6449807	194	2785678	8809087
106	2059127	6511529	196	2800000	8854378
108	2078461	6572671	198	2814250	8899439
110	2097618	6633250	200	2828428	8944272
112	2116602	6693281	202	2842535	8988883
114	2135416	6752778	204	2856572	9033272
116	2154066	6811755	206	2870541	9077445
118	2172557	6870226	208	2884442	9121404
120	2190891	6928204	210	2898276	9165152
122	2209073	6985700	212	2912044	9208692
124	2227106	7042727	214	2925748	9252027
126	2244995	7099296	216	2939388	9295161
128	2262742	7155418	218	2952965	9338095
130	2280351	7211103	220	2966480	9380832
132	2297826	7266361	222	2979933	9423376
134	2315168	7321203	224	2993326	9465728
136	2332381	7375636	226	3006660	9507892
138	2349469	7429671	228	3019934	9549870
140	2366432	7483315	230	3033151	9591664
142	2383276	7536578	232	3046310	9633276
144	2400000	7589467	234	3059412	9674710
146	2416610	7641990	236	3072459	9715967
148	2433106	7694154	238	3085450	9757049
150	2449490	7745967	240	3098387	9797959
152	2465766	7797436	244	3124100	9879272
154	2481935	7848567	248	3149604	9959920
156	2498000	7899368	252	3174902	10039921
158	2513962	7949843	256	3200000	10119289
160	2529823	8000000	260	3224904	10198040
162	2545585	8049845	264	3249616	10276187
164	2561250	8099383	268	3274142	10353744
166	2576820	8148620	272	3298485	10430724
168	2592297	8197561	276	3322650	10507141
170	2607681	8246212	280	3346641	10583006
172	2622976	8294577	284	3370460	10658331
174	2638182	8342662	288	3394113	10733127
176	2653300	8390471	292	3417602	10807405
178	2668333	8438010	296	3440931	10881177
180	2683282	8485282	300	3464102	10954452
182	2698148	8532292	304	3487120	11027240
184	2712932	8579045	308	3509986	11099550
186	2727637	8625544	312	3532705	11171393
188	2742262	8671794	316	3555278	11242776

$\sqrt{\text{Zahl}}$	Ungerade	Gerade
320	3577709	11313709
324	3600000	11384200
328	3622155	11454257
332	3644174	11523889
336	3666061	11593102
340	3687818	11661904
344	3709448	11730303
348	3730952	11798305
352	3752333	11865918
356	3773593	11933148
360	3794734	12000000
364	3815757	12066483
368	3836666	12132601
372	3857461	12198361
376	3878144	12263768
380	3898718	12328829
384	3919184	12393547
388	3939544	12457930
392	3959798	12521981
396	3979950	12585707
400	4000000	12649111
406	4029889	12743626
412	4059557	12837446
418	4089010	12930584
424	4118253	13023057
430	4147289	13114878
436	4176123	13206060
442	4204760	13296617
448	4233203	13386561
454	4261456	13475905
460	4289523	13564660
466	4317407	13652839
472	4345113	13740452
478	4372643	13827509
484	4400000	13914022
490	4427189	14000000
496	4454212	14085454
0502	4481072	14170392
0508	4507772	14254824
0514	4534314	14338759
0520	4560702	14422206
0526	4586938	14505172
0532	4613026	14587667
0538	4638966	14669697
0544	4664762	14751272
0550	4690416	14832397
0556	4715931	14913082
0562	4741308	14993332
0568	4766551	15073155
0574	4791660	15152558

$\sqrt{\text{Zahl}}$	Ungerade	Gerade
0580	4816638	15231547
0588	4849743	15336232
0596	4882623	15440208
0604	4915283	15543488
0612	4947727	15646086
0620	4979960	15748016
0628	5011986	15849291
0636	5043809	15949922
0644	5075432	16049923
0652	5106859	16149304
0660	5138094	16248077
0668	5169140	16346254
0676	5200000	16443844
0684	5230679	16540859
0692	5261179	16637308
0700	5291503	16733201
0708	5321654	16828548
0716	5351636	16923357
0724	5381450	17017638
0732	5411100	17111400
0740	5440589	17204651
0748	5469918	17297399
0756	5499091	17389653
0764	5528110	17481419
0772	5556978	17572707
0780	5585697	17663522
0788	5614268	17753873
0796	5642695	17843767
0804	5670979	17933210
0812	5699123	18022209
0820	5727129	18110771
0830	5761945	18220868
0840	5796551	18330303
0850	5830952	18439089
0860	5865152	18547237
0870	5899153	18654759
0880	5932959	18761664
0890	5966574	18867963
0900	6000000	18973666
0910	6033242	19078785
0920	6066301	19183327
0930	6099181	19287302
0940	6131884	19390720
0950	6164415	19493589
0960	6196774	19595918
0970	6228965	19697716
0980	6260991	19798990
0990	6292854	19899749

Allgemeine Wurzelbehandlung

Es gibt im Prinzip nur zwei Möglichkeiten, Wurzeln auf mechanischen Rechenmaschinen zu berechnen: Entweder nach dem Toepler-Algorithmus, oder mit Hilfe eines Iterationsverfahrens.

Das Toepler-Verfahren

Der Toeplersche Wurzelalgorithmus beruht darauf, daß die Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen stets eine Quadratzahl ist:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \text{bzw.} \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Dieses Ergebnis kann man umgekehrt dazu benutzen, die Quadratwurzel einer Zahl a zu berechnen, indem man von a fortlaufend die ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots$ abzieht, bis man Null oder gerade noch einen positiven Rest erhält. Die Anzahl der Subtrahenden ist dann die Quadratwurzel von a bzw. die größte ganze Zahl unterhalb von $\sqrt{a}$.

Das Toepler-Verfahren eignet sich optimal für die Automatisierung, da es nach einer elementaren Rechenvorschrift arbeitet und ein einfaches Abbruch-Kriterium besitzt (nämlich die Subtraktion unter Null). Letzteres kann von einer Rechenmaschine sehr gut zur Steuerung der Abläufe verwendet werden. Tatsächlich wurde eine leicht abgeänderte Variante dieses Verfahrens bei den Staffelwalzenmaschinen Friden SRW und SRQ benutzt – den einzigen elektromechanischen Rechenmaschinen, die automatisch Quadratwurzeln ziehen können. Obwohl es aus mathematischer Sicht sehr elegant ist, kann man das Toepler-Verfahren für das manuelle Radizieren auf der FACIT CA1-13 nicht empfehlen. Abgesehen davon, daß der Rechenvorgang langwierig und sehr fehleranfällig ist, besitzen die Facit-Rechenmaschinen keine selbstkorrigierende (Voll-)Tastatur, die das Eintasten der gleichmäßig anwachsenden Subtrahenden erleichtert. Für höhere Potenzen gibt es außerdem keine vergleichbare Formel, so daß die Toepler-Methode auch nur zur Berechnung von Quadratwurzeln verwendet werden kann.

Iterationsverfahren

Bei einem iterativen Verfahren wird, ausgehend von einem Näherungswert b, mit Hilfe einer Iterationsvorschrift ein neuer Näherungswert $\tilde{b}$ bestimmt, der den zu berechnenden Wert besser approximiert. Ein solches Iterationsverfahren läßt sich für die Quadratwurzel wie folgt angeben:

> Zu einer gegebenen Zahl $a \geq 1$ soll $\sqrt{a}$ berechnet werden. Mit Hilfe einer Tabelle (oder mittels eines Rechenstabes) bestimmt man zunächst einen Näherungswert b für $\sqrt{a}$, so daß der Fehler $h = \sqrt{a} - b$ möglichst klein ist, auf jeden Fall aber $h < 2\,b$ gilt. Dann ist
>
> $$\tilde{b} = \frac{a}{2\,b} + \frac{b}{2}$$
>
> ein besserer Näherungswert für $\sqrt{a}$ mit dem kleineren Fehler $\frac{h^2}{2\,b}$.

Herleitung. Aus $\sqrt{a} = b + h$ erhält man zunächst

$$a = (b+h)^2 = b^2 + 2\,b\,h + h^2.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $2\,b$, so bekommt man

$$\frac{a}{2\,b} = \frac{b}{2} + h + \frac{h^2}{2\,b}\,.$$

Addiert man nun auf beiden Seiten den Wert $\frac{b}{2}$ und ersetzt man $b + h$ durch $\sqrt{a}$, dann gilt

$$\frac{a}{2\,b} + \frac{b}{2} = \sqrt{a} + \frac{h^2}{2\,b}\,.$$

Die linke Seite der obigen Gleichung nimmt man als neuen Näherungswert $\tilde{b} = \frac{a}{2\,b} + \frac{b}{2}$. Somit ist $\sqrt{a} = \tilde{b} - \frac{h^2}{2\,b}$. Berücksichtigt man $h < 2\,b$, also $\frac{h}{2\,b} < 1$, dann gilt für den neuen Fehler $\frac{h^2}{2\,b} = \frac{h}{2\,b} \cdot h < h$. Daher wird $\sqrt{a}$ durch $\tilde{b}$ besser approximiert als durch b.

Schreibt man die obige Iterationsvorschrift in der Form

$$\tilde{b} = \frac{a + b^2}{2\,b}$$

so kommt man auf das auf Seite 18 beschriebene Verfahren: **Quadratwurzeln – wenn höchstens 5 genaue Ziffern verlangt werden**. Als Beispiel wird dort die Quadratwurzel von $a = 677.25$ berechnet. Im allgemeinen wird man zunächst die Kommastellung im Radikanden anpassen müssen, indem man die Position des Dezimalkommas soweit verschiebt, bis man einen ganzzahligen Anteil zwischen 100 und 999 erhält. Diese Voraussetzung ist jedoch im vorliegenden Fall $a = 677.25$ bereits erfüllt. Anschließend sucht man in der Quadratwurzel-Tabelle auf Seite 20/21 diejenige Zahl b^2, welche a am nächsten liegt, und entnimmt aus einer der nebenstehenden Spalten den auf sieben Stellen gerundeten Wert für $2\,b$. Hierbei steht „Ungerade" und „Gerade" für die Anzahl der Stellen vor dem Komma bzw. die Anzahl der Nullen nach dem Komma im Radikanden. Im Fall $a = 677.25$ ist $b^2 = 676$ der passende Näherungswert, und da man drei Vorkommastellen hat, liest man aus der Spalte „Ungerade" den Wert 5200000 für $2\,b$ ab. Bei richtiger Kommastellung entspricht dies $2\,b = 52.00000$, also dem Näherungswert $b = 26$ für $\sqrt{a}$. Auf der Facit-Maschine wird nun der Iterationsschritt, wenn der Hauptsteuerhebel auf DIV umgelegt ist und die Rechenwerke gelöscht sind, folgendermaßen ausgeführt:

0 6 7 7 2 5 ← ADD

0 6 7 6 ← ADD

5 2 0 0 0 0 0 ← ÷

Damit bei der Division die Maschinenkapazität voll ausgenutzt wird, tabuliert man die Summanden im Zähler und im Nenner ganz nach links. Um einen Überlauf des Resultatwerks bei der Summe zu vermeiden, wird dem Radikanden, falls wie im Beispiel die führende Ziffer eine 5 oder höher ist, eine Null vorangestellt. Nach dem Rechenvorgang zeigt das Quotientenwerk den Wert 00260240 an. Dies entspricht dem verbesserten Näherungswert $\tilde{b} = 26.024$ für $\sqrt{677.25}$.

In der Quadratwurzel-Tabelle sind die Radikanden in fünf Abschnitten (von $a_{\min}$ bis $a_{\max}$) mit jeweils einer festen Schrittweite Δ tabuliert, und zwar

Δ	2	4	6	8	10
$a_{\min}$	100	240	400	580	820
$a_{\max}$	240	400	580	820	999

Eine Fehleranalyse zeigt, daß der relative Fehler nach Anwendung des Iterationsverfahrens in jedem dieser Abschnitte nicht größer ist als $\frac{1}{32}\left(\frac{\Delta}{a_{\min}}\right)^2$, also maximal bei $1.25 \cdot 10^{-5}$ liegt. Der Näherungswert ist daher stets auf vier Stellen genau. Im Intervall von 820 bis 999 reduziert sich der relative Fehler auf einen Wert unter $0.5 \cdot 10^{-5}$, so daß man in diesem Bereich sogar einen auf fünf Stellen genauen Wert erhält.

Im Abschnitt **Quadratwurzeln – wenn mindestens 8 genaue Ziffern verlangt werden** auf Seite 19 wird der Iterationsschritt nochmals angewendet. Dabei nutzt man auch die speziellen Eigenschaften des Multiplikatorwerkes einer Facit-Rechenmaschine, damit man den vorherigen (vier- bis fünfstelligen) Näherungswert $b = 26.024$ nur *einmal* in die Maschine eintasten muß. Nach den üblichen Vorbereitungen (Steuerhebel einstellen, Maschine nullstellen) ermittelt man den nächsten Näherungswert mit der Iterationsvorschrift in der Gestalt

$$\tilde{b} = \frac{0.5 \cdot a}{b} + 0.4 \cdot b + 0.1 \cdot b$$

Auf den ersten Blick werden bei dem Rechenschema, das in der Anleitung angegeben ist, nur die ersten beiden Terme summiert. Der letzte Summand $0.1 \cdot b$ wird jedoch automatisch von der Maschine addiert, und zwar während der Ausführung der Multiplikation $0.4 \cdot b$. Das Ergebnis lautet jetzt 26024027. Nach den Kommaregeln entspricht das dem Näherungswert 26.024027, und dieses Resultat ist auf 8 Stellen genau die Quadratwurzel von 677.25.

Eine Fehleranalyse wie oben zeigt, daß der relative Fehler bei dieser nochmaligen Anwendung des Iterationsverfahrens höchstens $\frac{1}{2048}\left(\frac{\Delta}{a_{\min}}\right)^4$ beträgt und somit stets kleiner ist als 10^{-10}. Theoretisch würde man also einen Näherungswert erhalten, der mindestens auf 9 Stellen genau ist. In der Praxis erreicht man diese Genauigkeit nicht, da die Kapazität des Quotientenwerkes begrenzt ist (8 Stellen bei den FACIT-Modellen E bis CA1-13).

Dritte und höhere Wurzeln. Während es zur Berechnung von Wurzeln $\sqrt[n]{a}$, $n > 2$, kein direktes Verfahren mehr gibt, kann man dennoch ein Iterationsverfahren ähnlich wie bei den Quadratwurzeln angeben:

Ist zu einer gegebenen Zahl $a \geq 1$ die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$, $n > 1$, zu bestimmen und ist b ein hinreichend guter Näherungswert (beispielsweise aus einer Tabelle), so liefert

$$\tilde{b} = \frac{a}{n\,b^{n-1}} + \frac{(n-1)b}{n}$$

eine bessere Näherung von $\sqrt[n]{a}$. Im Spezialfall $n = 3$ ist

$$\tilde{b} = \frac{a}{3\,b^2} + \frac{2\,b}{3}$$

die Formel für den nächsten Näherungswert der Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$, und für $n = 2$ erhält man die bereits angegebene Iterationsvorschrift für die Quadratwurzel von a.

Das Iterationsverfahren für die Kubikwurzel läßt sich auf einer Facit-Rechenmaschine noch relativ bequem durchführen, weil man darauf die Quadratzahl b^2 sehr schnell berechnen kann. Wurzeln höherer Ordnung können auf diese Weise auch ermittelt werden, nur macht sich bei wachsendem n die relativ geringe Kapazität der Rechenwerke störend bemerkbar, insbesondere bei der Berechnung von $n\,b^{n-1}$. Es ist daher sinnvoller, z.B. eine vierte Wurzel durch zweimaliges Ziehen der Quadratwurzel auszurechnen.

Das Iterationsverfahren für allgemeine Wurzelexponenten $n > 1$ erhält man ähnlich wie im Fall $n = 2$: Aus $\sqrt[n]{a} = b + h$ folgt zunächst durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$a = (b+h)^n = b^n + n\,b^{n-1}h + O(h^2).$$

Division durch $n\,b^{n-1}$ liefert die Gleichung

$$\frac{a}{n\,b^{n-1}} = \frac{b}{n} + h + O(h^2).$$

Addiert man noch auf beiden Seiten den Wert $\frac{(n-1)b}{n}$ und ersetzt man $b + h$ durch $\sqrt[n]{a}$, dann hat man

$$\frac{a}{n\,b^{n-1}} + \frac{(n-1)b}{n} = \sqrt[n]{a} + O(h^2).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der neue Näherungswert für $\sqrt[n]{a}$. Der Ausdruck $O(h^2)$ steht für einen Term, der durch h^2 beschränkt ist. Geht man davon aus, daß der Fehler h bereits hinreichend klein war, so wird $O(h^2)$ noch kleiner sein, und somit ist $\tilde{b}$ eine bessere Näherung für $\sqrt[n]{a}$ als b.

Trigonometrische Funktionen

Die FACIT CA1-13 ist eine vollautomatische Vierspezies-Maschine, d.h. sie beherrscht die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Wie das iterative Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel zeigt, kann man mit etwas mehr Aufwand auch Rechenoperationen jenseits der Grundrechenarten ausführen. Wie sieht es jedoch mit der Behandlung noch komplizierterer Operationen aus, etwa der trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens? Auf einem modernen Taschenrechner lassen sich solche Werte mühelos mit nur einem Tastendruck ermitteln. Wir werden sehen, daß die Berechnung dieser Funktionen auf der FACIT CA1-13 ebenfalls mit relativ hoher Genauigkeit (sechs Dezimalstellen nach dem Komma) und vergleichsweise wenigen Rechenschritten möglich ist. Die gezeigten Beispiele beziehen sich dabei auf ein späteres Modell der CA1-13 mit den Bezeichnungen I für das Einstellwerk und III für das Resultatwerk.

Theoretische Grundlagen

Der Sinus eines Winkels α ist zunächst geometrisch definiert, und zwar als das Längenverhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse bei einem rechwinkligen Dreieck, dessen Ankathete und Hypothenuse den Winkel α einschließen. Mit der Entdeckung der Infinitesimalrechnung fand man bald auch eine analytische Darstellung für den Sinus in Form einer unendlichen Reihe:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $n!$ (n Fakultät) das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, und x ist der Winkel im *Bogenmaß*, also $0 \leq x < 2\pi$. Zwischen Bogen- und Gradmaß besteht folgender Zusammenhang: Das Bogenmaß x eines Winkels α mit $0 \leq \alpha < 360°$ ist die Länge des Kreisbogens, den der Mittelpunktswinkel α auf einem Kreis mit dem Radius 1 ausschneidet, d.h.

$$x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360} \approx \frac{\alpha}{57,2958} \tag{2}$$

Die unendlichen Reihe (1) liefert ein Verfahren, den Wert $\sin x$ beliebig genau auszurechnen. Ersetzt man nämlich die unendliche Reihe durch eine endliche Summe der Form

$$\sin x \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!} \tag{3}$$

so wird die Annäherung an $\sin x$ um so besser, je größer man die Zahl N der Summanden wählt. Da die Reihenglieder ständig das Vorzeichen wechseln, kann man außderdem den Fehler bei Abbruch der Reihe abschätzen und zeigen, daß dieser betraglich stets kleiner ist als der erste vernachlässigte Summand

$$\frac{x^{2N+3}}{(2N+3)!} \tag{4}$$

In der Trigonometrie arbeitet man neben dem Sinus noch mit dem Cosinus eines Winkels α, der bei einem rechtwinkligen Dreieck definiert ist als das Längenverhältnis von Ankathete zu Hypothenuse, wobei diese zwei Seiten gerade den Winkel α einschließen. Für den Cosinus eines Winkels x im Bogenmaß hat man ebenfalls eine einfache Reihenentwicklung, nämlich

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$$

Hieraus erhält man die Näherungsformel

$$\cos x \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^N \frac{x^{2N}}{(2N)!}$$

wobei der Abbruchfehler immer kleiner ist als

$$\frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!} \tag{5}$$

Nehmen wir nun an, dass wir $\sin x$ bzw. $\cos x$ mit einer Genauigkeit von sechs Dezimalstellen nach dem Komma bestimmen möchten. Der Fehler in (4) bzw. (5) soll also maximal den Wert $0,5 \cdot 10^{-6}$ haben. Dazu müssen wir einerseits die Anzahl N der Reihenglieder entsprechend groß wählen, und andererseits ist es vorteilhaft, den Bereich für x etwas einzuschränken. Bekanntlich genügt es, die Werte von Sinus und Cosinus für Winkel $0 \leq \alpha < 90°$ im Gradmaß bzw. $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ im Bogenmaß zu berechnen, denn mit Hilfe der trigonometrischen Formeln

$$\sin(360 + \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha),$$
$$\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(180° + \alpha) = \cos(180° - \alpha), \quad \cos(90° + \alpha) = -\cos\alpha$$

lassen sich alle anderen Argumente auf entsprechende Winkel im ersten Quadranten zurückführen. Benutzt man außerdem noch den Zusammenhang

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

so braucht man überhaupt nur den Wert einer der beiden Funktionen Sinus oder Cosinus auszurechnen. Durch Anwendung und Kombination obiger Umrechnungsformeln können wir demnach die Berechnung von Sinus und Cosinus beliebiger Winkel auf die Berechnung eines der Werte $\sin\alpha$, $0 \leq \alpha < 60°$, oder $\cos\alpha$, $0 < \alpha \leq 30°$, zurückführen. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \sin 300° &= \sin(180° + 120°) = -\sin 120° \\ \sin 120° &= \sin(90° + 30°) = \sin(90° - 30°) = \sin 60° \\ \sin 60° &= \cos(90° - 60°) = \cos 30° \end{aligned}$$

und daher $\sin 300° = -\cos 30°$.
Wählen wir jetzt $N = 4$ bei $\sin x$ sowie $N = 5$ bei $\cos x$ als Anzahl der Reihenglieder und rechnen wir die maximalen Argumente $60°$ bzw. $30°$ auf das Bogenmaß um, so erhalten wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad \text{für} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \tag{6}$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \qquad \text{für} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \tag{7}$$

Dabei sind die oberen Grenzen für den jeweiligen Winkelbereich so gewählt, daß die Fehler für die Näherungen gemäß (4) bzw. (5) höchstens

$$\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{11}}{11!}, \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{10}}{10!} < 10^{-9}$$

betragen und folglich innerhalb der gewünschten Genauigkeit von $0,5 \cdot 10^{-6}$ liegen (kleinere Werte für N würden diese Bedingung noch nicht erfüllen). Wir erhalten also Näherungsformeln zur Berechnung von Sinus und Cosinus, die auf mindestens 6 Dezimalstellen nach dem Komma genau sind. In der obigen Form sind die Approximationen aber noch ungeeignet für die Anwendung auf einer Rechenmaschine, denn die höheren Potenzen lassen sich nur durch entsprechend viele Multiplikationen ermitteln (auf der FACIT CA1-13 kann man z.B. nur noch das Quadrat einer Zahl bequem errechnen), und aufgrund der begrenzten Kapazität der Rechenwerke müßte man zudem bei jeder Multiplikation entsprechend viele Stellen abstreichen. Wir können diese Probleme vermeiden, indem wir die Summen (6) und (7) in eine Form bringen, die für das Maschinenrechnen wesentlich besser geeignet sind, und zwar

$$\sin x \approx x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\left(1-\frac{x^2}{4\cdot 5}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\left(1-\frac{x^2}{8\cdot 9}\right)\right)\right)\right) \tag{8}$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}\left(1-\frac{x^2}{5\cdot 6}\left(1-\frac{x^2}{7\cdot 8}\right)\right)\right) \tag{9}$$

Diese Ausdrücke sehen auf den ersten Blick etwas komplizierter aus als die Formeln (6) und (7), aber sie liefern Algorithmen, die den Rechenvorgang in sich wiederholende, maschinentaugliche Rechenschritte zerlegen. Zur Berechnung von $\sin x$ bzw. $\cos x$ sind die folgenden Operationen durchzuführen, wobei die Klammern in (8) bzw. (9) von innen nach außen ausgewertet werden.

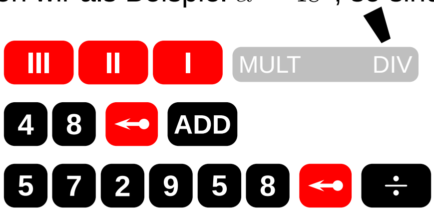
- Algorithmus für $\sin\alpha$:
  1. Berechne $x=\frac{\alpha}{57{,}29578}$ und quadriere x. Das Ergebnis ist a.
  2. Berechne $1-\frac{a}{72}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist b.
  3. Berechne $1-\frac{b}{42}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist c.
  4. Berechne $1-\frac{c}{20}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist d.
  5. Berechne $1-\frac{d}{6}$ und multipliziere mit x. Das Ergebnis ist $\approx \sin\alpha$.
- Algorithmus für $\cos\alpha$:
  1. Berechne $x=\frac{\alpha}{57{,}29578}$ und quadriere x. Das Ergebnis ist a.
  2. Berechne $1-\frac{a}{56}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist b.
  3. Berechne $1-\frac{b}{30}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist c.
  4. Berechne $1-\frac{c}{12}$ und multipliziere mit a. Das Ergebnis ist d.
  5. Berechne $1-\frac{d}{2}$. Das Ergebnis ist der Näherungswert für $\cos\alpha$.

Die Auswertung von $\sin\alpha$ erfordert also lediglich eine Quadrierung, vier Multiplikationen bzw. fünf Divisionen. Bei der Berechnung von $\cos\alpha$ ist die letzte Multiplikation mit x nicht erforderlich, d.h. man kommt sogar mit einer Multiplikation weniger aus. Die Quadrierung kann bei der FACIT CA1-13 in einem Schritt durchgeführt werden, indem man nach dem Eintasten von x sofort die Taste = drückt. Außerdem werden die Multiplikationen vollautomatisch abgewickelt, und ein Ausdruck der Form $1-\frac{p}{q}$ läßt sich, wie die nachfolgenden Überlegungen zeigen, mit Hilfe der *negativen Division* direkt und ohne Subtraktion ermitteln.

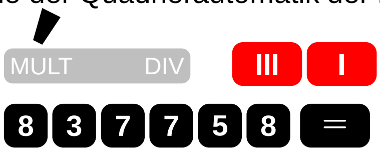
Schnelle Berechnung von $1-\frac{p}{q}$. Unter der Voraussetzung $0<p<q$ gilt $0<1-\frac{p}{q}<1$, und daher sind nur die Nachkommastellen des Resultats von Interesse. Wir bringen zunächst die Facit-Rechenmaschine in die Divisionslage, d.h. der Hauptsteuerhebel wird auf DIV umgelegt, und durch Betätigung der Taste NEG schalten wir das Quotientenwerk gleichläufig zum Resultatwerk. Nachdem wir den Dividenden p ganz links in das Resultatwerk und den Divisior q ganz links in das Einstellwerk gebracht haben, löschen wir das Quotientenwerk und betätigen anschließend die Taste ÷. Am Ende des Rechenvorgangs erhalten wir im Quotientenwerk die Nachkommastellen von $1-\frac{p}{q}$. *Begründung:* Mittels der negativen Division, welche man durch die Kombination DIV + NEG auf der FACIT CA1-13 einstellt, wird der Komplementärwert des Quotienten $\frac{p}{q}$ in das Umdrehungszählwerk eingebracht. Denkt man sich – ähnlich wie bei der Division im Plussinn – eine Außen-Eins links am Quotientenwerk, so entspricht das Ergebnis wegen $0<\frac{p}{q}<1$ genau dem Wert $1-\frac{p}{q}$.

Praktische Durchführung

Falls der Winkel α mit $0 \leq \alpha < 90°$ im Gradmaß gegeben ist, rechnen wir ihn zunächst mittels der Formel (2) in das Bogenmaß um, d.h. wir dividieren den Wert α durch die Zahl $57,2958$. Nehmen wir als Beispiel $\alpha = 48°$, so sind die Operationen

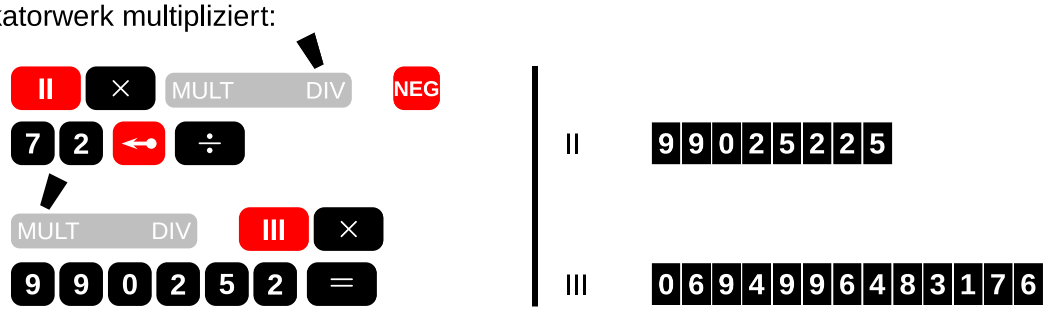


durchzuführen. Werk II zeigt das Ergebnis 08377577, d.h. $48°$ entspricht auf sechs Dezimalstellen gerundet dem Bogenmaß $x \approx 0,837758$. Bei der Ausführung der einzelnen Rechenschritte im Algorithmus ist übrigens darauf zu achten, daß man alle einzugebenden Werte, also das Argument x, den Wert x^2 sowie die Resultate der negativen Divisionen stets auf sechs Dezimalstellen rundet.
Für die weitere Durchführung des Algorithmus benötigen wir den Wert $a = x^2$, den wir schnell mit Hilfe der Quadrierautomatik der FACIT CA1-13 ermitteln:

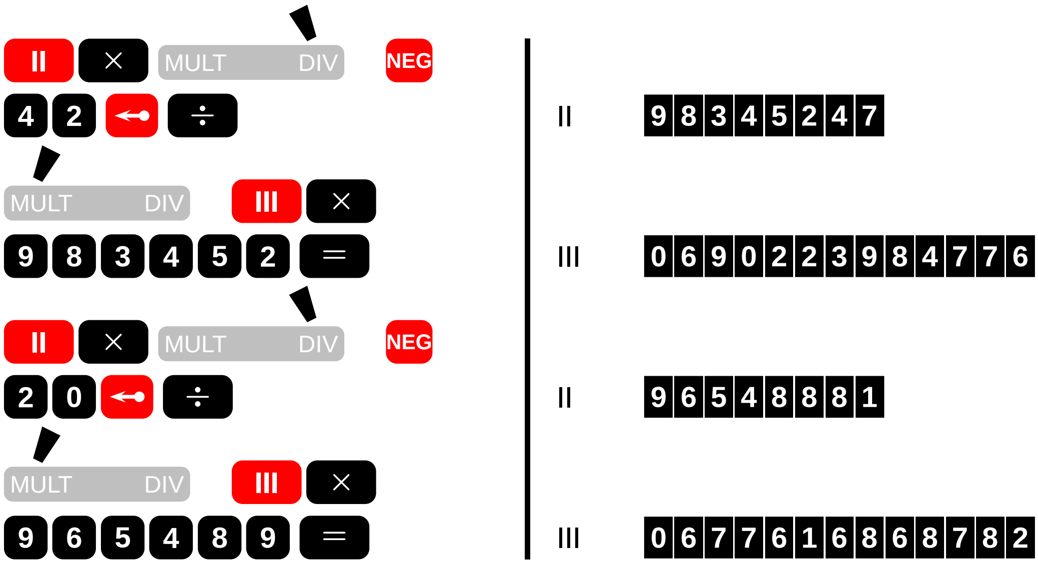


Das Resultatwerk III liefert den Wert 0701838466564, und somit ist auf sechs Dezimalstellen gerundet $x^2 = 0,701838$.
Bei den nachfolgenden Rechenschritten ist die Zahl $a = x^2$ ein konstanter Multiplikator. Er wird mit führender 0 nur einmal eingetastet und bleibt im Multiplikatorwerk gespeichert:

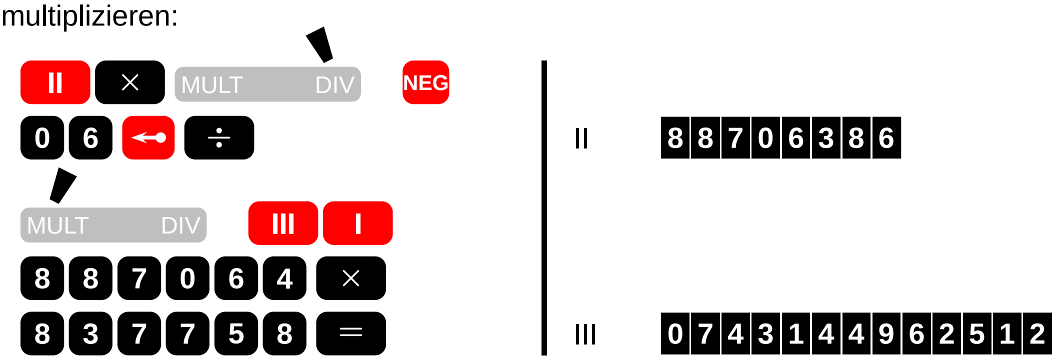
Damit das Multiplikatorwerk nicht gelöscht wird, dürfen wir keine der Tasten ADD, SUB STOP, I drücken – das Nullstellen des Einstellwerks erfolgt von nun ab (bei zuvor eingestelltler Lage MULT des Hauptsteuerhebels) mit der Taste ×. Die Multiplikanden sind jeweils die gerundeten Ergebnisse der negativen Divisionen, von denen wir nur die ersten sechs Nachkommastellen verwenden. Wir bilden somit immer Produkte aus einer siebenstelligen Zahl mit sechsstelligen Zahlen, so daß die Ergebnisse genau 13 Dezimalstellen haben und die Kapazität des Resultatwerks voll ausgeschöpft wird.
Die Zahl a kommt außerdem als Dividend in der ersten negativen Division vor und steht aufgrund der Quadrierung bereits an richtiger Position ganz links im Resultatwerk. Nach dem Löschen des Umdrehungszählwerks und des Einstellwerkes schalten wir um auf DIV + NEG und führen die negative Division zur Berechnung von $1 - \frac{a}{72}$ aus. Das Ergebnis im Quotientenwerk wird dann auf sechs Dezimalstellen gerundet und anschließend mit dem Wert a aus dem Multiplikatorwerk multipliziert:



Wir führen diesen Schritt noch zweimal durch, wobei sich jeweils nur der Divisor ändert:



Abschließend müssen wir noch eine negative Division ausführen und das Ergebnis mit dem Wert x multiplizieren:



Als Resultat erhalten wir den Wert $\sin 48° \approx 0,743144962512$. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem exakten Wert $\sin 48° = 0,743144825477\ldots$, so liegt der absolute Fehler bei $0,14 \cdot 10^{-6}$ und damit unterhalb der gewünschten Genauigkeit von $0,5 \cdot 10^{-6}$. Daher ist, gerundet und auf sechs Nachkommastellen genau,

$$\sin 48° \approx 0,743145.$$

Ergänzungen und Ausblicke

- Alle weiteren trigonometrischen Funktionen lassen sich mittels einer Division aus den Werten von Sinus und Cosinus gewinnen. Den Tangens bzw. Cotangens eines Winkels α erhält man über die Formeln

  $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

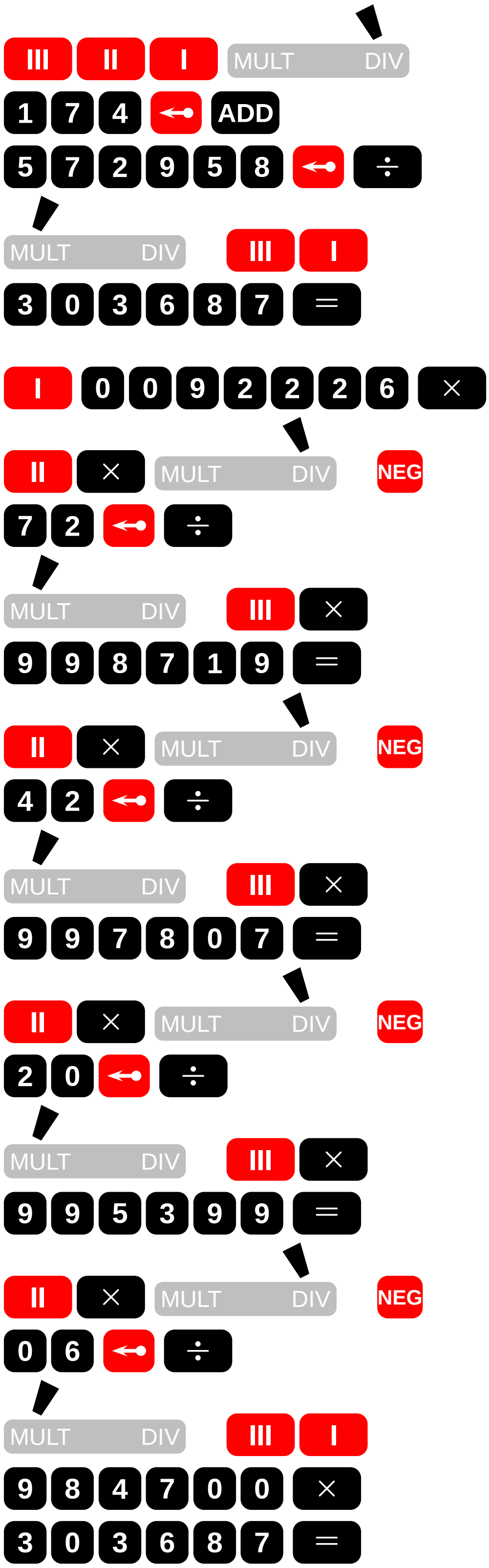
  und die (weniger gebräuchlichen) Funktionen Sekans bzw. Cosekans sind gerade die reziproken Werte von Cosinus bzw. Sinus.

- Die angegebenen Verfahren zur Berechnung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ liefern Näherungswerte mit einem *absoluten Abbruchfehler* kleiner als 10^{-9}. Nicht berücksichtigt wurden bisher Fehler, die beim Runden der Zwischenergebnisse auftreten. Mittels einer genaueren Fehleranalyse läßt sich aber zeigen, daß das Endergebnis einschließlich dieser Rundungsfehler immer noch auf sechs Nachkommastellen genau ist.

- Eine Alternative zu dem hier vorgestellten Verfahren ist der CORDIC-Algorithmus, der 1959 von Volder entwickelt wurde und auch heute noch in Prozessoren zur Berechnung trigonometrischer Funktionen verwendet wird (siehe J. E. Volder, *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*, IRE Trans. Electronic Computers, Sept. 1959, 330–334).

Weitere Beispiele

Beispiel 1: $\sin 17,4°$



$x = \frac{17{,}4}{57{,}29578}$ Winkel im Bogenmaß

II 0 3 0 3 6 8 7 1

$x \approx 0,303687$ quadrieren

III 0 0 9 2 2 2 5 7 9 3 9 6 9

$a = x^2 \approx 0,092226$ speichern

$1 - \frac{a}{72}$ berechnen

II 9 9 8 7 1 9 0 9

$b := a\,(1 - \frac{a}{72})$

III 0 0 9 2 1 0 7 8 5 8 4 9 4

$1 - \frac{b}{42}$ berechnen

II 9 9 7 8 0 6 9 6

$c := a\,(1 - \frac{b}{42})$

III 0 0 9 2 0 2 3 7 4 8 3 8 2

$1 - \frac{c}{20}$ berechnen

II 9 9 5 3 9 8 8 2

$d := a\,(1 - \frac{c}{20})$

III 0 0 9 1 8 0 1 6 6 8 1 7 4

$1 - \frac{d}{6}$ berechnen

II 9 8 4 6 9 9 7 3

$x\,(1 - \frac{d}{6})$

III 0 2 9 9 0 4 0 5 8 8 9 0 0

Ergebnis: $\boxed{\sin 17,4° \approx 0,299041}$

Beispiel 2: $\cos 17,4^\circ$

MULT DIV · III · I	$x \approx 0,303687$ (aus Beispiel 1) quadrieren
3 0 3 6 8 7 =	III 0 0 9 2 2 2 5 7 9 3 9 6 9
I · 0 0 9 2 2 2 6 ×	$a = x^2 \approx 0,092226$ speichern
II · × · MULT DIV · NEG	$1 - \frac{a}{56}$ berechnen
5 6 ← ÷	II 9 9 8 3 5 3 1 2
MULT DIV · III · ×	$b := a\left(1 - \frac{a}{56}\right)$
9 9 8 3 5 3 =	III 0 0 9 2 0 7 4 1 0 3 7 7 8
II · × · MULT DIV · NEG	$1 - \frac{b}{30}$ berechnen
3 0 ← ÷	II 9 9 6 9 3 0 8 7
MULT DIV · III · ×	$c := a\left(1 - \frac{b}{42}\right)$
9 9 6 9 3 1 =	III 0 0 9 1 9 4 2 9 5 8 4 0 6
II · × · MULT DIV · NEG	$1 - \frac{c}{12}$ berechnen
1 2 ← ÷	II 9 9 2 3 3 8 0 9
MULT DIV · III · ×	$d := a\left(1 - \frac{c}{20}\right)$
9 9 2 3 3 8 =	III 0 0 9 1 5 1 9 3 6 4 3 8 8
II · × · MULT DIV · NEG	$1 - \frac{d}{2}$ berechnen
0 2 ← ÷	II 9 5 4 2 4 0 3 2

Ergebnis: $\boxed{\cos 17,4^\circ \approx 0,954240}$

Beispiel 3: $\tan 17,4^\circ$

III · II · I · MULT DIV	$\tan 17,4^\circ = \frac{\sin 17,4^\circ}{\cos 17,4^\circ}$
2 9 9 0 4 1 ← ADD	(mit den Werten aus Beispiel 1 und 2)
9 5 4 2 4 0 ← ÷	II 0 3 1 3 3 8 1 3

Ergebnis: $\boxed{\tan 17,4^\circ \approx 0,313381}$